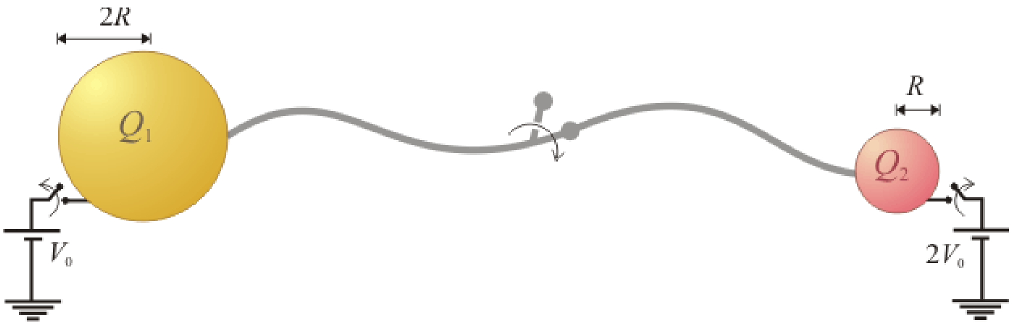
1 Enunciado

Se tienen dos esferas conductoras separadas por una distancia mucho mayor que sus respectivos radios, R y $2R$, de modo que no hay una influencia apreciable entre ellas.

1. Las esferas conductoras se conectan a sendos generadores que establecen valores fijos de potencial, $2V_0$ y V_0, respectivamente. Una vez que se han cargado, se procede a su desconexión. ¿Qué cantidad de energía electrostática se almacena en el sistema?
2. Estando en la situación final del apartado anterior, la esferas se conectan entre sí mediante un cable conductor muy largo y con resistencia eléctrica no nula. Determine la cantidad de carga eléctrica y el valor del potencial en cada una de las esferas cuando el sistema recobra el equilibrio. ¿Qué cantidad de energía electrostática se habrá disipado en el cable por efecto Joule al final del proceso?



2 Solución

2.1 Energía, cargas y valores de potencial

En un sistema electrostático donde la carga eléctrica se distribuye de forma continua en una determinada región de fuentes $\mathcal{F}$, la energía electrostática almacenada en el sistema responde a la expresión,

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}} V\,\mathrm{d}q$$

donde $V(\mathbf{r})$ es el potencial electrostático creado por la distribución. Como se recordará, esta energía es el trabajo externo que ha sido necesario realizar para configurar dicha distribución de carga eléctrica estática.

Obsérvese que la región $\mathcal{F}$ no ha de ser necesariamente conexa; es decir, puede estar formada por diferentes regiones, conectadas o no. Si las esferas conductoras del sistema analizado se cargan con sendas cantidades Q_1 y Q_2 de carga eléctrica, por ejemplo conectándolas a generadores que establezcan valores constantes del potencial en todos sus puntos, dichas cargas se distribuirán en el equilibrio exclusivamente en sus superficies $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$, según determinadas densidades superficiales, $\sigma_e\rfloor_{\partial\tau_1}$ y $\sigma_e\rfloor_{\partial\tau_2}$:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\partial\tau_1} V(\mathbf{r})\,\sigma_e(\mathbf{r})\mathrm{d}S \;+\frac{1}{2}\int_{\partial\tau_2} V(\mathbf{r})\,\sigma_e(\mathbf{r})\mathrm{d}S$$

Por otra parte, cada una de las superficies conductoras es una superficie equipotencial en la que el potencial electrostático tiene idéntico valor en todos sus puntos. Por tanto, se tendrá:

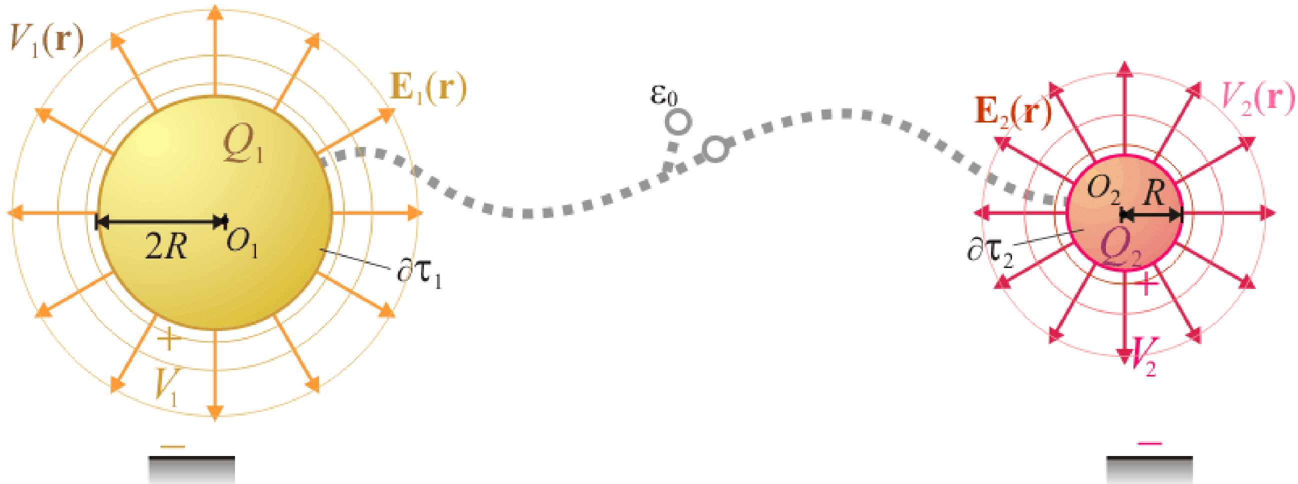
$$\left.\begin{array}{l} V(\mathbf{r})\rfloor_{\partial\tau_1} = V_1 \\[2ex] V(\mathbf{r})\rfloor_{\partial\tau_2} = V_2 \end{array}\right\} \;\Longrightarrow\; U_e = \frac{1}{2}\left(V_1\int_{\partial\tau_1}\sigma_e(\mathbf{r})\mathrm{d}S \;+ V_2\int_{\partial\tau_2}\sigma_e(\mathbf{r})\mathrm{d}S\right) = \frac{1}{2}(Q_1V_1+Q_2V_2)$$

Por tanto, para calcular las cantidades de energía electrostática requeridos en el ejercicio, basta con determinar los valores de las cargas y los potenciales de las esferas conductoras en las dos situaciones indicadas.

Las relaciones entre cantidades de carga eléctrica y valores de los potenciales en un sistema formado por dos esferas conductoras, lo suficientemente alejadas para que su influencia mutua sea despreciable, ya fueron analizadas en otro ejercicio de examen esta asignatura. En esta configuración, puede considerarse que las cargas se distribuyen uniformemente en cada una de las superficies conductoras. Por tanto, el campo eléctrico creado por cada distribución van a ser radial respecto del centro de la esfera correspondiente y, en consecuencia, las equipotenciales en el entorno de cada esfera serán (prácticamente) superficies esféricas concéntricas con aquélla:

$$V_1(\mathbf{r}) \simeq k_e \, \frac{Q_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\,; \qquad V_2(\mathbf{r}) \simeq k_e \, \frac{Q_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}$$

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los radiovectores que indican la posición de los centros de las esferas, O_1 y O_2, respecto del punto elegido como origen del sistema de referencia.



En el sistema bajo estudio, los puntos de las superficies esféricas $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ se hallan a distancias $2R$ y R, de sus respectivos centros; por tanto,

$$V(\mathbf{r})\big|_{\partial\tau_1} = k_e \, \frac{Q_1}{2R} = V_1 \quad \longrightarrow \quad Q_1 = 8\pi\varepsilon_0 R\, V_1 = C_1\, V_1$$

$$V(\mathbf{r})\big|_{\partial\tau_2} = k_e \, \frac{Q_2}{R} = V_2 \quad \longrightarrow \quad Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R\, V_2 = C_2\, V_2$$

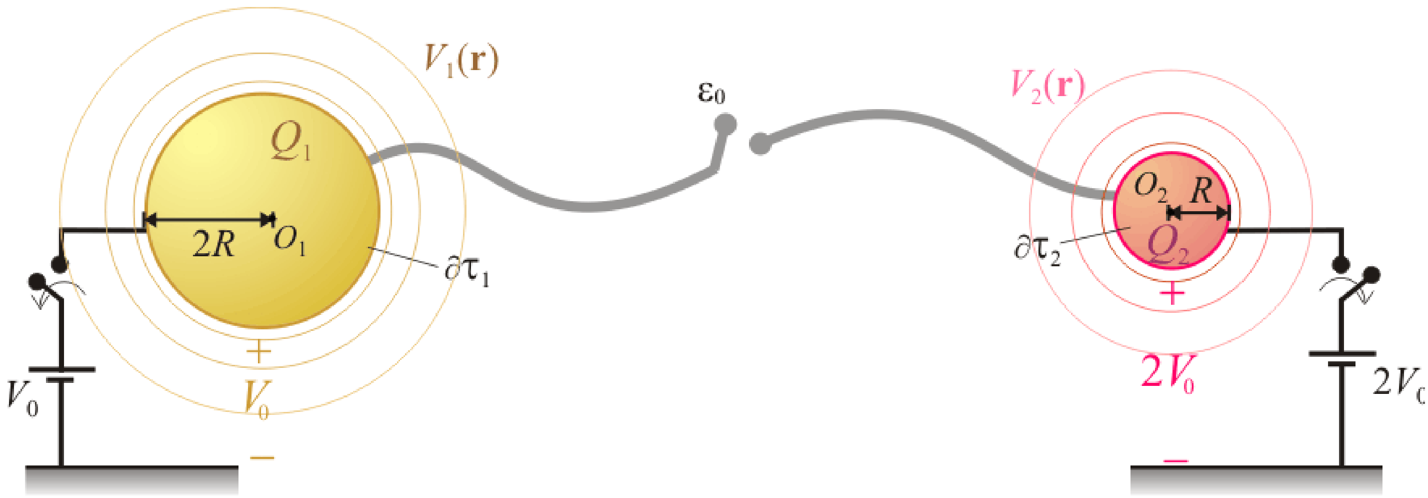
donde C_1 y C_2 son los parámetros geométricos que determinan la relación entre la carga almacenada en cada conductor y el valor del potencial (medido respecto del infinito) al que se encuentra su superficie. Obsérvese que, al estar muy alejadas y no existir influencia mutua, las esferas no constituyen un condensador. En todo caso, podría considerarse que cada una por separado lo formaría con el infinito; así, los parámetros C_1 y C_2 serían las capacidades eléctricas de esos virtuales condensadores.

Por otra parte, aclararemos que, aunque en realidad podría llegar a almacenarse una cierta cantidad de carga en el cable conductor utilizado para conectar las esferas, consideraremos que ésta va a ser despreciable frente a la que va a haber en las esferas. Esta simplificación no impide obtener resultados razonablemente precisos, siempre que tamaño de las esferas no sea demeasiado pequeño en relación con la longitud del hilo.

2.2 Cantidad de energía almacenada inicialmente

En la primera configuración, con las esferas conductoras desconectadas entre sí, se conectan a sendos generadores que fijan en ellas valores de potencial distintos. Los cantidades de carga eléctrica que dichos generadores suministran a los conductores están determinadas por los correspondientes valores de capacidad eléctrica:

$$\left.\begin{array}{lll} V_1 = V_0 & \longrightarrow & Q_1 = 8\pi\varepsilon_0 R\, V_0 \\ V_2 = 2V_0 & \longrightarrow & Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 R\, V_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad Q_1 = Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 R\, V_0 = Q_0$$



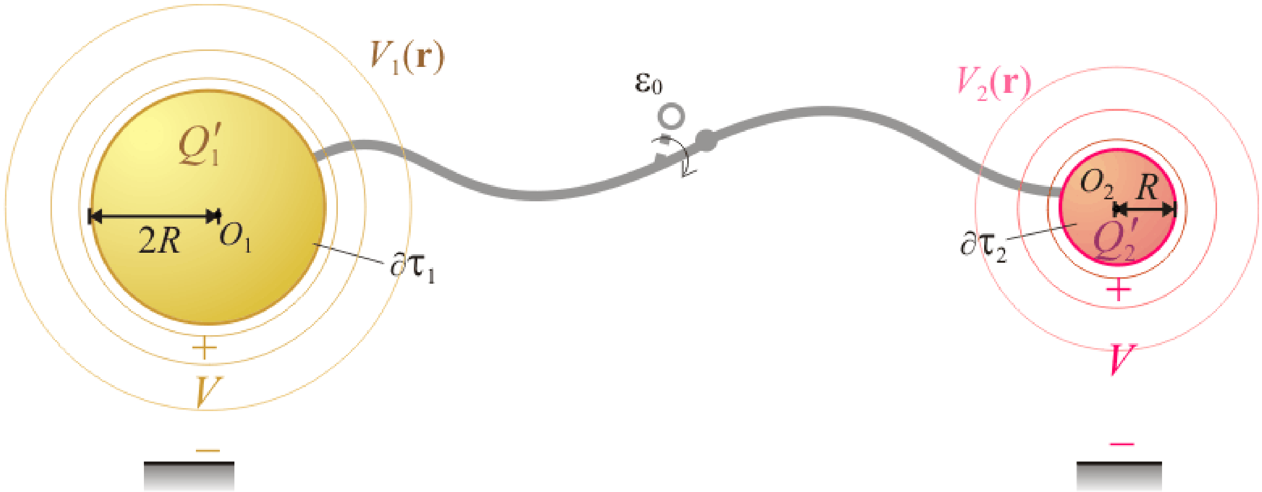
Cuando se desconectan los generadores, las cargas permanecen en los conductores y, en consecuencia, los valores del potencial en las esferas seguirán siendo V_0 y $2V_0$. En consecuencia, la energía electrostática almacenada en el sistema será:

$$U_e^{\text{ini}} = \frac{1}{2}\,\big(Q_0 V_0 + 2Q_0 V_0\big) = \frac{3}{2}\,Q_0 V_0 = 12\pi\varepsilon_0 R\, V_0^2$$

2.3 Energía en el sistema tras la conexión de las esferas

Cuando, tras conectar las dos esferas mediante un cable largo, el sistema recupera el equilibrio, los valores de carga y potencial habrán cambiado. Como el cable es conductor, las superficies de las dos esferas son parte de la misma equipotencial, a la cuál corresponderá un valor V (aún no determinado) de potencial electrostático. Si las esferas se mantienen suficientemente alejadas y el efecto del cable se considera despreciable, la relación entre los valores de carga y potencial en cada una de ellas sigue estando determinada por la capacidades eléctricas C_1 y C_2 obtenidas en el apartado 2.1. Por tanto, los valores de cargas y potenciales en las superficies $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ serán:

$$\left.\begin{array}{lll} V_1' = V & \longrightarrow & Q_1' = C_1\, V_1' = 8\pi\varepsilon_0 R\, V \\ V_2' = V & \longrightarrow & Q_2' = C_2\, V_2' = 4\pi\varepsilon_0 R\, V \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad V = \frac{Q_1'}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \Longrightarrow \quad Q_1' = 2Q_2'$$



Obsérvese que la variación de carga eléctrica en las superficies esféricas será exclusivamente debida al intercambio de carga que se haya producido a gtravés del cable que las conecta pues, como se recordará, previamente se habían desconectados de los generadores. Es decir, tras dicha desconexión, el sistema formado por las dos esferas (más el cable) constituyen un sistema eléctricamente aislado en el que la carga total debe ser constante. Si, tal como dijimos, se desprecia la cantidad de carga almacenada en el cable, se tendrá:

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = 2Q_0$$

Y aplicando la relación obtenida anteriormente para las cantidades de carga en las superficies esféricas...

$$Q_1'+Q_2' = \left(2Q_2'+Q_2'\right) = 2Q_0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1' = \dfrac{4}{3}\,Q_0 = \dfrac{32}{3}\,\pi\varepsilon_0 R\,V_0 \\[2ex] Q_2' = \dfrac{2}{3}\,Q_0 = \dfrac{16}{3}\,\pi\varepsilon_0 R\,V_0 \end{array} \right\} \quad \longrightarrow \quad V_1' = V_2' = V = \frac{4}{3}\,V_0$$

Por tanto, la energía electrostática almacenada en esta configuración es:

$$U_e^{\text{fin}} = \frac{1}{2}\,\left(Q_1'V_1' + Q_2'V_2'\right) = \frac{4}{3}\,Q_0V_0 = \frac{32}{3}\,\pi\varepsilon_0 R\,V_0^2$$

Obsérvese que los valores de energía electrostática en el sistema, antes y después de la conexión de la esferas, son distintos. Si calculamos el incremento sufrido por esta magnitud,

$$\Delta U_e = U_e^{\text{fin}} - U_e^{\text{ini}} = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)\,Q_0V_0 = -\frac{4}{3}\,\pi\varepsilon_0 R\,V_0^2 < 0$$

obtenemos que el proceso de conexión de las esferas ha supuesto una disminución de la energía electrostática del sistema. Este fenómeno tiene una sencilla explicación: el proceso de intercambio de carga eléctrica entre las esferas se realiza a través del cable conductor, dando lugar a la aparición de una corriente eléctrica transitoria que, por efecto Joule, disipará energía en forma de calor en una cantidad igual a la disminución de energía almacenda en el sistema.

De hecho, si se realiza el análisis de dicha corriente transitoria, utilizando el principio general de conservación de la carga, se obtiene que la cantidad de energía disipada por efecto Joule durante el proceso de recombinación de las cargas, coincide exactamente con el valor absoluto del incremento de energía electrostática que acabamos de obtener.